|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Limites |
| Código del guion | MA\_11\_03\_CO |
| Descripción | Para la compresión del concepto de límite de una función se presenta su noción intuitiva mediante la interpretación tabular y gráfica de las imágenes de la función próximas al límite, luego se establece el concepto formal de límite y sus propiedades, además se explican algunas estrategias para hallar límites indeterminados de funciones. |

[SECCIÓN 1]**1 Noción intuitiva de límite**

Etimológicamente, la palabra límite proviene del latín “limes”, que se traduce como “frontera o borde”, en matemáticas, el concepto de límite se refiere a la proximidad de las imágenes de la función a un número real específico, por lo tanto los valores próximos al límite en una función, son de interés en el estudio del éste.

Asimismo, **el concepto de límite** permite hacer proyecciones sobre el comportamiento de fenómenos que son modelados a través de una función y que requieren ser analizados a largo plazo. Por esta razón el concepto de límite encierra la noción de infinito, te invitamos a revisar el siguiente interactivo que presenta una clasificación del infinito.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_CO\_REC10 |
| **Título** | Infinitamente grande e infinitamente pequeño |
| **Descripción** | Interactivo en el que se presenta a través de ejemplos, la idea de infinitamente grande e infinitamente pequeño, mediante algunas situaciones, por ejemplo, la paradoja del movimiento de Zenón y analogías entre los números reales y los números naturales. |

[SECCIÓN 2] **1.1 Límite de una función en un punto**

El límite de una función en un número real *a* se estudia a través de las imágenes de los valores próximos a *a,* de esta forma:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición intuitiva de límite de una función en un punto** |
| **Contenido** | Una función *f* que está definida para valores tan aproximados a un número real *a* como se requiere y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real *L*, el límite cuando *x* tiende a *a* de las imágenes por la función *f* es L, y se denota como: |

Por ejemplo**,** Sea la función

Esta función no está definida para *x = 0*, puesto que al remplazar cero por *x* en la función *f*, el denominador es cero, sin embargo al inspeccionar el comportamiento de las imágenes de *f* de los números reales próximos a cero, tanto por derecha (números reales mayores que cero), como por izquierda (números reales menores que cero). Como se muestra en las siguientes tablas, se obtiene:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Por izquierda | |  | Por derecha | | | *X* | *f(x)* |  | *x* | *f(x)* | | -0,1 | 0,9983341664… |  | 0,1 | 0,9983341664682… | | -0,034 | 0,99980734446… |  | 0,034 | 0,9998073444691… | | -0,017 | 0,99995183402… |  | 0,017 | 0,9999518340293… | | -0,001 | 0,99999983333… |  | 0,001 | 0,9999998333333… | | -0,00023 | 0,99999999118... |  | 0,00023 | 0,9999999911833… | | -0,00001023 | 0,999999999982... |  | 0,00001023 | 0,9999999999825… | | -0,000000531 | 0,999999999999… |  | 0,000000531 | 0,99999999999995… | | -0,000000101 | 0,9999999999999… |  | 0,000000101 | 0,9999999999999… | |

Se observa que a la vez que *x* toma valores en la función más cercanos a cero tanto por derecha como por la izquierda las imágenes son números reales positivos cada vez más cercanos a *1*. Este comportamiento puede verse reflejado en la gráfica de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG01 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y que resalte los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función f(x) se evidencia que en los valores de *x* próximos a cero, sus imágenes se aproximan a uno. |

De esta forma, se tiene que el límite de la función *f* cuando *x* tiende a cero es *1*, y se representa como:

Por ejemplo, sea la función

,

al remplazar a *x* por valores próximos a cero, se tienen las siguientes imágenes de *g(x)*:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Por izquierda | |  | Por derecha | | | *X* | *g(x)* |  | *x* | *g(x)* | | -0,1 | 0,544021110… |  | 0,1 | -0,54402111088… | | -0,034 | 0,9075576245… |  | 0,034 | -0,90755762454… | | -0,017 | -0,762216923… |  | 0,017 | 0,762216923022… | | -0,001 | -0,826879540… |  | 0,001 | 0,826879540532… | | -0,00023 | 0,1377066308… |  | 0,00023 | -0,13770663086… | | -0,00001023 | 0,8700178328… |  | 0,00001023 | -0,87001783285… | | -0,000000531 | 0,8962273099… |  | 0,000000531 | -0,8962273099… | | -0,000000101 | 0,0988696287… |  | 0,000000101 | -0,09886962877… | |

Se observa que sus imágenes no se aproximan a ningún número real en específico, por esta razón se afirma que la función

no tiene límite en *x = 0.* Como se muestra en la representación gráfica de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG02 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función se evidencia que *g(x)* oscila de creciente a decreciente sin aproximarse a un valor específico en el rango, a medida que los valores de su dominio se aproximan a cero. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Si *f* es una función de números reales que está definida para valores tan aproximados a un número real *a* como se requiere y a medida que *x* toma valores más cercanos a *a* sus imágenes son cada vez mayores, el límite cuando *x* tiende a *a* de las imágenes por la función *f* es infinito, y se denota como:  Si cuando *x* toma valores en la función *f* cada vez más próximos al número real *a,* sus imágenes son negativas y además el valor absoluto de sus imágenes son cada vez mayores, el límite cuando *x* tiende a a de las imágenes por la función *f* es menos infinito, y se denota como: |

Por ejemplo,sea la función

al remplazar *x* por valores cercanos a cero se obtienen las siguientes tablas:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Por izquierda | |  | Por derecha | | | *x* | *h(x)* |  | *x* | *h(x)* | | -0,1 | 100 |  | 0,1 | 100,00 | | -0,034 | 865,0519… |  | 0,034 | 865,05 | | -0,017 | 3460,2076… |  | 0,017 | 3460,21 | | -0,001 | 1000000 |  | 0,001 | 1000000,00 | | -0,00023 | 18903591,6824… |  | 0,00023 | 18903591,68 | | -0,00001023 | 9555396935,9664… |  | 0,00001023 | 9555396935,97 | | -0,000000531 | 3546589776600,31… |  | 0,000000531 | 3546589776600,31 | | -0,000000101 | 98029604940692,1 |  | 0,000000101 | 98029604940692,10 | |

Como se observa en las tablas anteriores, a medida que los valores de *x* se aproximan a cero, sus imágenes son mayores, este comportamiento puede verse reflejado en la gráfica de la función de la siguiente manera:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG03 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función *h(x)* cuando *x* se acerca a cero, sus imágenes son mayores por esta razón en la gráfica se observa que la recta *x = 0* es una asíntota vertical. |

Por lo tanto,

Por ejemplo,sea la función

al remplazar a *x* por valores próximos a cero, se obtiene

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Por izquierda | |  | Por derecha | | | *x* | *t(x)* |  | *x* | *t(x)* | | -0,1 | -0,02 |  | 0,1 | -0,02 | | -0,034 | -0,17301… |  | 0,034 | -0,17301… | | -0,017 | -0,69204… |  | 0,017 | -0,69204… | | -0,001 | -200 |  | 0,001 | -200 | | -0,00023 | -3780,71834… |  | 0,00023 | -3780,71834… | | -0,00001023 | -1911079,38719… |  | 0,00001023 | -1911079,38719… | | -0,000000531 | -709317955,320… |  | 0,000000531 | -709317955,32006… | | -0,000000101 | -19605920988,1… |  | 0,000000101 | -19605920988,1… | |

Se observa que al aproximarse por derecha y por izquierda a cero, sus imágenes son negativas y su valor absoluto es cada vez mayor. Este comportamiento puede verse reflejado en la gráfica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG04 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función t(x) cuando *x* se acerca a cero, sus imágenes son números reales negativos y su valor absoluto es cada vez mayor, por esta razón en la gráfica se observa que la recta *x = 0* es una asíntota vertical. |

De esta forma, se concluye que el límite de *t(x)* cuando *x* tiende a cero es menos infinito, es decir

Por ejemplo,considere la función *m(x) = x2 – 2*, al remplazar a *x* por valores muy cercanos a cero se obtiene:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Por izquierda | |  | Por derecha | | | *X* | *m(x)* |  | *x* | *m(x)* | | -0,1 | -1,99 |  | 0,1 | -1,99 | | -0,034 | -1,998844 |  | 0,034 | -1,998844 | | -0,017 | -1,999711 |  | 0,017 | -1,999711 | | -0,001 | -1,999999 |  | 0,001 | -1,999999 | | -0,00023 | -1,9999999471 |  | 0,00023 | -1,9999999471 | | -0,00001023 | -1,99999999989… |  | 0,00001023 | -1,99999999989… | | -0,000000531 | -1,9999999999997… |  | 0,000000531 | -1,9999999999997… | | -0,000000101 | -1,9999999999999... |  | 0,000000101 | -1,9999999999999… | |

Al remplazar *x* por números reales cercanos a cero, las imágenes de la función se aproximan a -2, además, en este caso *m(2) = -2*. Este comportamiento puede verse reflejado en la gráfica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG05 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función *m(x) = x2 – 2*, se observa que cuando *x* se acerca a cero, sus imágenes se aproximan a *-2*. |

Por lo tanto, se obtiene que

En conclusión, de los ejemplos anteriores, la función *m(x) = x2 – 2,* es la única que tiene imagen cuando *x = 0*, sin embargo las funciones



tienen límite cuando *x* tiende a cero, debido a que la noción de límite está relacionada principalmente con la noción de proximidad.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC20 |
| **Título** | Límites por tabulación o gráfica |
| **Descripción** | Actividad para identificar el límite de una función en un punto a partir de tabulación o su gráfica |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC30 |
| **Título** | Puntos de acumulación |
| **Descripción** | Interactivo para estudiar el concepto de punto de acumulación y su relación con los límites |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC40 |
| **Título** | Determinar puntos de acumulación |
| **Descripción** | Actividad para identificar el punto de acumulación dado cierto conjunto |

[SECCIÓN 3] **1.1.1 Límites laterales**

Para determinar el límite de una función en un número real *a*, se consideran las imágenes de valores cercanos al número real *a* tanto menores que *a* como mayores que *a* como en los ejemplos anteriores, pero es posible que al analizar las imágenes de la función de los números reales próximos a *a,* se observe que las imágenes de los valores que están a la derecha de *a* se aproximen a un número real diferente al que se aproximan las imágenes de los valores que están a la izquierda del número real *a.* por ejemplo:

Considérese

Al remplazar *x* por valores cercanos a *-1*, se obtienen las siguientes tablas:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Por izquierda | |  | Por derecha | | | *x* | *f(x)* |  | *x* | *f(x)* | | -1,1 | -2,1 |  | -0,9 | 1,9 | | -1,034 | -2,034 |  | -0,966 | 1,966 | | -1,017 | -2,017 |  | -0,983 | 1,983 | | -1,001 | -2,001 |  | -0,999 | 1,999 | | -1,00023 | -2,00023 |  | -0,99977 | 1,99977 | | -1,00001023 | -2,00001023 |  | -0,99998977 | 1,99998977 | | -1,000000531 | -2,000000531 |  | -0,99999947 | 1,999999469 | | -1,000000101 | -2,000000101 |  | -0,999999999 | 1,999999899 | |

En la tabla de la izquierda se observa que al remplazar por valores cercanos y menores que -1, las imágenes de la función se aproximan a -2. Por otra parte la tabla de la derecha muestra que al remplazar en la función por valores cercanos y mayores que -1, sus imágenes se aproximan a 2, como también se observa en la gráfica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG06 |
| **Descripción** | ampliado cerca de -1 y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imágenes de los valores a la derecha de -1 se aproximan a 2 y las imágenes de valores a la izquierda del -1 se aproximan a -2 |

Por supuesto, el límite de la función *f* cuando x tiende a -1 no existe, ya que no hay una única tendencia, sin embargo, como hay una tendencia diferente tanto por derecha como por izquierda cada uno de estos comportamientos se describe como un límite lateral.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición intuitiva de límites laterales** |
| **Contenido** | Sea *f* una función de números reales definida para números reales menores que *a* y tan próximos a *a* como se requiere, además las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real *L*, entonces, el límite de la función *f* cuando *x* tiende a *a* **por la izquierda** es L, y se denota como:  De forma similar, el límite de la función *f* cuando x tiende a **por la derecha** es *L*, y se denota como: |

Del ejemplo anterior se obtiene que:

De esta forma, la existencia o no existencia del límite de una función depende de sus límites laterales, así:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Existencia del límite de una función a partir de sus límites laterales** |
| **Contenido** | Sea *f* una función de números reales y *a* un número real, por lo tanto,  si y solo si  Donde, |

En otras palabras, si los límites de la función por izquierda y por derecha de un número real son iguales, la función tiene límite, si los límites laterales son diferentes, el límite de la función no existe.

Así,

no existe,

porque

Por ejemplo, sea la función *g(x) = x3 – 8,* al analizar las imágenes de los números reales cercanos a *x = 2*, se tiene que:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Por izquierda | |  | Por derecha | | | *x* | *g(x)* |  | *x* | *g(x)* | | 1,9 | -1,141 |  | 2,1 | 1,261 | | 1,966 | -0,40110330… |  | 2,034 | 0,41497530… | | 1,983 | -0,20227091… |  | 2,017 | 0,20573891… | | 1,999 | -0,01199400… |  | 2,001 | 0,01200600… | | 1,99977 | -0,00275968… |  | 2,00023 | 0,00276032… | | 1,99998977 | -0,00012276… |  | 2,00001023 | 0,00012276… | | 1,999999469 | -0,00000637… |  | 2,00000053 | 0,00000637… | | 1,999999899 | -0,00000121… |  | 2,000000101 | 0,00000121… | |

Tanto por izquierda como por derecha las imágenes de la función se aproximan a 0 a medida que los elementos del dominio de la función se aproximan a 2, de esta forma se obtiene que

Por ejemplo, considera la gráfica de la función *h(x)*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG07 |
| **Descripción** | ampliado cerca de -4 resaltando los valores del rango y etiquetando la función como |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función  se observan las imágenes de los valores próximos a *x = -4* |

De acuerdo con la gráfica anterior, *h(-4) = -1*, sin embargo se tiene que

, ,

por lo tanto

Por ejemplo, determinar el límite de la función

cuando de *x = 0*

Al analizar las imágenes de *f(x)* cuando *x* se aproxima a cero, se obtienen las siguientes tablas:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Por izquierda | |  | Por derecha | | | *x* | *f(x)* |  | *x* | *f(x)* | | -0,1 | -10 |  | 0,1 | 10 | | -0,034 | -29,412… |  | 0,034 | 29,412… | | -0,017 | -58,824… |  | 0,017 | 58,824… | | -0,001 | -1000 |  | 0,001 | 1000 | | -0,00023 | -4347,826… |  | 0,000230000 | 4347,826… | | -0,00001023 | -97751,711… |  | 0,000010230 | 97751,711… | | -0,000000531 | -1883239,171… |  | 0,000000531 | 1883239,171… | | -0,000000101 | -9900990,099… |  | 0,000000101 | 9900990,099… | |

Por tanto,

La no existencia de

,

se verifica en la gráfica de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG08 |
| **Descripción** | ampliado cerca de 0 y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de *0*, las imágenes de valores a su derecha tienden a infinito y las imágenes de valores a su izquierda tienden a menos infinito. |

La función racional

tiene una asíntota horizontal *x = 0*, a continuación se presenta la definición de asíntota vertical a través del límite de una función en un determinado punto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de asíntota vertical** |
| **Contenido** | **La asíntota vertical de una función *f* es *x = k****,* si y solo si existen valores del dominio de *f* tan cercanos a *k* como se quiera y se cumple una o varia de las siguientes condiciones: |

Por ejemplo, considera la función

Para analizar los valores alrededor de -1, hay que tener en cuenta que a la izquierda de -1, la función está dada por la expresión

y a la derecha de -1 , la expresión es

*x2 – 1*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Por izquierda | |  | Por derecha | | | *x* | *f(x)* |  | *x* | *f(x)* | | -1,1 | -36,3 |  | -0,9 | -0,19 | | -1,034 | -94,337294… |  | -0,966 | -0,066844 | | -1,017 | -182,5215882… |  | -0,983 | -0,033711 | | -1,001 | -3006,003… |  | -0,999 | -0,001999 | | -1,00023 | -13049,47895… |  | -0,99977 | -0,00045995 | | -1,00001023 | -293261,132… |  | -0,99998977 | -0,00002046… | | -1,000000531 | -5649723,514… |  | -0,999999469 | -0,00000106… | | -1,000000101 | -29702976,32… |  | -0,999999899 | -0,0000002… | |

de donde:

por lo tanto, la función *f* tiene como asíntota vertical la recta *x = -1*, a pesar de que *f(-1) = 2.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG09 |
| **Descripción** | ampliado cerca de -1 y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función tiene como asíntota horizontal *x = -1* |

Los límites laterales permiten analizar el comportamiento de las imágenes cerca de un punto, aun cuando solamente es posible acercarse por derecha o solo por izquierda.

Por ejemplo, si se considera la función

que tiene por domino *Dom h = (-∞, -1) ∪ [1, ∞)*, no tiene sentido hablar del límite cuando *x* tiende a -1, ya que no es posible calcular las imágenes de valores cercanos por la derecha de -1, mientras que las imágenes a la izquierda de -1 sí se pueden determinar, como se muestra en la siguiente tabla:

|  |  |
| --- | --- |
| *x* | *h(x)* |
| -1,1 | *-4,582575...* |
| -1,034 | *-7,7345672…* |
| -1,017 | *-10,8925231…* |
| -1,001 | *-44,732538…* |
| -1,00023 | *-93,255842…* |
| -1,00001023 | *-442,158819…* |
| -1,000000531 | *-1940,741956…* |
| -1,000000101 | *-4449,941709…* |

Se observa que las imágenes son negativas y el valor absoluto de sus imágenes es cada vez mayor a medida que su dominio se aproxima a -1, luego

por esta razón, la función tiene asíntota horizontal *x = -1*.

De manera similar,

no existe,

Porque no es posible estudiar las imágenes de los valores a la izquierda de 1, pero sí de los valores a la derecha de 1, que se presentan en la siguiente tabla:

|  |  |
| --- | --- |
| x | *h(x)* |
| 1,1 | 0,218217… |
| 1,034 | 0,129289… |
| 1,017 | 0,091806… |
| 1,001 | 0,0223551… |
| 1,00023 | 0,010723… |
| 1,00001023 | 0,002261… |
| 1,000000531 | 0,000515… |
| 1,000000101 | 0,000224… |

de donde

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG10 |
| **Descripción** | Ampliado en el intervalo (-1,5, 1,5) y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función  que tiene como asíntota vertical la recta *x = -1* y no tiene asíntota vertical en *x = 1* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC50 |
| **Título** | Límites laterales |
| **Descripción** | Actividad para identificar el límite o los límites laterales de una función en un punto a partir de su gráfica |

[SECCIÓN 2] **1.2 Límites en el infinito**

El estudio de las imágenes de las funciones cuando los valores del dominio se hacen infinitamente grandes se lleva a cabo mediante el estudio de los límites en el infinito que se definen como:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición intuitiva de límite al infinito** |
| **Contenido** | Si *f* es una función definida para valores infinitamente grandes y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real *L*, entonces el límite cuando *x* tiende a **infinito** de las imágenes por la función *f* es *L*, y se denota como:  Asimismo, si la función *f* está definida en números reales negativos cuyo valor absoluto es un número real infinitamente grande y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real *L*, entonces se dice que el límite cuando *x* tiende a **menos** **infinito** de las imágenes por la función *f* es *L*, y se denota como : |

Por ejemplo, considera la función

,

al evaluar la función con números reales positivos cada vez mayores, que se hacen infinitamente grandes (tienden a infinito) o con números reales negativos cuyo valor absoluto es cada vez mayor (tienden a menos infinito), se tiene que:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | |  |  | | | *x* | *f(x)* |  | x | *f(x)* | | -100 | -0,00506365641… |  | 100 | -0,00506365641… | | -345,53 | -0,00013074556… |  | 345,53 | -0,00013074556… | | -3133,605 | -0,00031627445… |  | 3133,605 | -0,00031627445… | | -12896,58483 | -0,00002636868… |  | 12896,58483 | -0,00002636868… | | -369896,3204 | -0,00000238665… |  | 369896,3204 | -0,00000238665… | | -6943605,786 | 0,00000013170… |  | 6943605,786 | 0,00000013170... | | -79365930,49 | 0,00000001023… |  | 79365930,49 | 0,00000001023… | |

En ambos casos, a medida que el valor absoluto del dominio de la función es mayor, se observa que las imágenes se aproximan a cero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG11 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imágenes de la función en el infinito y en el menos infinito tiende a cero. |

Por ejemplo, si se considera la función *g(x) = -x3+x2* se tiene que:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | | *x* | *g(x)* | | -100 | 1010000 | | -345,53 | 41372556,61 | | -3133,605 | 30780192033,32 | | -12896,58483 | 2145150817914,39 | | -369896,3204 | 50610567542353400,000 | | -6943605,786 | 334776705850875000000 | | -79365930,49 | 499922107415254000000000 | |

|  |
| --- |
|  |

En la tabla anterior se observa que cuando los elementos del dominio en valor absoluto son infinitamente grandes, sus imágenes tienden a infinito. Es decir

.

Además,

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | | *x* | *g(x) = -x3+x2* | | 100 | -990000 | | 345,53 | -41133775 | | 3133,605 | -30760553073 | | 12896,58483 | -2144818174114 | | 369896,3204 | -50610293895777700 | | 6943605,786 | -334776609423552000000 | | 79365930,49 | -499922094817352000000000 | |

De esta manera, se concluye que

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG12 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imágenes de la función en el infinito tiende a menos infinito y en el menos infinito tiende a infinito. |

Por ejemplo, si se considera la función *h(x) = sen (x)*

Al representar las imágenes de *h(x)* en una tabla se obtiene

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | *h(x) = sen (x)* |  | *x* | *h(x) = sen (x)* | | -100 | 0,506365641110 |  | 100 | -0,506365641110 | | -345,53 | 0,045176513825 |  | 345,53 | -0,045176513825 | | -3133,605 | 0,991079199205 |  | 3133,605 | -0,991079199205 | | -12896,58483 | 0,340065938383 |  | 12896,58483 | -0,340065938383 | | -369896,3204 | 0,882813679244 |  | 369896,3204 | -0,882813679244 | | -6943605,786 | -0,914515258822 |  | 6943605,786 | 0,914515258822 | | -79365930,49 | -0,812289706560 |  | 79365930,49 | 0,812289706560 | |

Debido a que la función oscila entre -1 y 1, en el infinito y en menos infinito no se muestra alguna tendencia, es decir

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG13 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imágenes de la función en el infinito y en el menos infinito no muestran ninguna tendencia. |

Por ejemplo, considera la función

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | *t(x)* |  | *x* | *t(x)* | | -100 | -0,01 |  | 100 | 0,01 | | -345,53 | -0,002894104709 |  | 345,53 | 0,002894104709 | | -3133,605 | -0,000319121268 |  | 3133,605 | 0,000319121268 | | -12896,58483 | -0,000077539908 |  | 12896,58483 | 0,000077539908 | | -369896,3204 | -0,000002703460 |  | 369896,3204 | 0,000002703460 | | -6943605,786 | -0,000000144017 |  | 6943605,786 | 0,000000144017 | | -79365930,49 | -0,0000000125999 |  | 79365930,49 | 0,0000000125999 | |

Se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG14 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imágenes de la función en el infinito y en menos infinito tienden a cero. |

En el capítulo de funciones se mencionaba que la función racional

tenía una asíntota vertical *y = 0*, por que el grado del numerador es menor que el del denominador, a continuación se presenta la definición exacta de asíntota horizontal aplicada a cualquier función (no solamente las funciones racionales).

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de asíntota horizontal** |
| **Contenido** | Una función *f* tiene como **asíntota horizontal** la recta ***y = k*** y solo si cumple una o las dos siguientes condiciones: |

**Ejemplo 4.** Si consideramos la función

Al analizar los límites al infinito y a menos infinito, se debe tener en cuenta que para valores negativos x < -2, la función está dada por la expresión

y para los valores positivos la expresión que permite calcular las imágenes es

Como se muestra en la siguiente tabla:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | x | *f(x)* |  | x | *f(x)* | | -100 | 3,0003000300030… |  | 100 | 0,1 | | -345,53 | 3,00002512773666… |  | 345,53 | 0,02894104708… | | -3133,605 | 3,00000030551518… |  | 3133,605 | 0,00319121267… | | -12896,58483 | 3,0000000180373… |  | 12896,58483 | 0,00077539907… | | -369896,3204 | 3,0000000000219… |  | 369896,3204 | 0,0000270346… | | -6943605,786 | 3,0000000000006… |  | 6943605,786 | 0,00000144017… | |

Por lo tanto,

Se concluye que la función *f* tiene dos asíntotas horizontales que son la recta *y = 1* y la recta *y = 0.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG15 |
| **Descripción** | Comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango y las rectas y=1 y y=0 punteadas como asíntotas de la función. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las rectas *y = 0*, y *y = 1* son las asíntotas horizontales de la función *f*. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC60 |
| **Título** | Límites en el infinito |
| **Descripción** | Actividad para practicar como identificar el límite de una función en el infinito por tabulación o gráfica |

[SECCIÓN 2] **1.3 Consolidación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC70 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Definición formal de límite |
| **Descripción** | Interactivo para explicar el concepto formal de límite y la necesidad de este |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC70 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Límites de las principales funciones |
| **Descripción** | Interactivo para estudiar los límites de algunas funciones que resultan ser base para el cálculo de otros límites |

[SECCIÓN 1] **2. Propiedades de los límites**

Hasta el momento, para calcular el límite de una función en un punto (o en el infinito), se debe conocer la gráfica de la función o poder calcular fácilmente las imágenes por la función de valores cercanos al número (o que tiendan al infinito), pero esta tarea no siempre es fácil de hacer, en especial si no se cuenta con una calculadora o computador, por esta razón, es necesario establecer algunas reglas que faciliten el cálculo de límites, entre ellas las propiedades.

Las propiedades de los límites relacionan a través de las operaciones de funciones, límites de funciones conocidos, y permiten calcular los límites de funciones desconocidas y que se relacionan a través de la suma, el producto y el cociente de funciones.

[SECCIÓN 2] **2.1. Suma de límites**

El límite de la suma de dos funciones presenta la siguiente propiedad:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Propiedad del límite de una suma de funciones** |
| **Contenido** | Si y existen  entonces |

Estas propiedades también se aplican para los **límites laterales** y **límites en el infinito.**

**Ejemplo 1.** Calcular

Se conoce que

y

Por lo tanto, por la propiedad de la suma de límites

**Ejemplo 2.** Calcular

Como

Aplicando la propiedad de la suma de límites, se obtiene

De manera específica, en la propiedad de límite de la suma de funciones se destacan los siguientes casos:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Algunas casos del límite de una suma de funciones** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces, 2. Si y entonces, 3. Si y entonces 4. Si y entonces 5. Si y entonces |

**Ejemplo 3.** Calcular:

este límite se puede expresar como el límite de una suma de funciones así:

Por lo tanto, se presentan los siguientes dos casos

y

Al considerar el primer caso se obtiene

.

respecto al segundo caso se obtiene

sin embargo, como

se concluye que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC90 |
| **Título** | Propiedad del límite de la suma de funciones |
| **Descripción** | Actividad para practicar cómo calcular el límite de funciones usando la propiedad de límite de la suma |

[SECCIÓN 2] **2.2. Producto de límites**

El límite del producto de un número real por una función es igual al producto del número real por el límite de la función, esta propiedad se define como

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Propiedad del límite del producto de una función por un escalar** |
| **Contenido** | Sea *c* un número real y el limite  existe  por lo tanto |

**Ejemplo 1.** Calcular:

se tiene que:

Por lo tanto

Asimismo, el límite del producto de funciones tiene la siguiente propiedad:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Propiedad del límite de un producto de funciones** |
| **Contenido** | Si el y el existen, entonces |

Estas mismas propiedades se cumplen para los **límites laterales** y **límites en el infinito.**

Por ejemplo, calcular:

Se tiene que:

Por lo tanto,

De manera específica, el límite del producto de dos funciones presenta los siguientes casos

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Casos del límite del producto de funciones** |
| **Contenido** | 1. Si y   entonces   1. Si y   entonces   1. Si y   entonces   1. Si y   entonces   1. Si y   entonces   1. Si y   entonces   1. Si y   entonces   1. Si y   entonces |

**Ejemplo 3.** Calcular:

se tiene que:

por lo tanto,

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC100 |
| **Título** | Propiedad del límite del producto de funciones |
| **Descripción** | Actividad para practicar como calcular el límite de funciones usando las propiedades de límite del producto y de la suma de funciones |

[SECCIÓN 2] **2.3. Cociente de límites**

El límite del cociente de funciones tiene la siguiente propiedad

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Propiedad del límite de un cociente** |
| **Contenido** | Si y el existen,  entonces |

Esta propiedad también se aplica para **límites laterales** y **límites en el infinito.**

**Ejemplo 1.** Calcular:

se tiene que:

como

Específicamente, esta propiedad presenta los siguientes casos:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Algunos casos de la propiedad del límite de un cociente** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces 4. Si y entonces 5. Si y entonces |

**Ejemplo 2.** Calcular:

Al considerar el límite por derecha de la función y al aplicar la propiedad del límite de un cociente, se obtiene

Al considerar el límite por izquierda de la función, se obtiene

Como los limites laterales no coinciden entonces:

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC110 |
| **Título** | Propiedad del límite del cociente de funciones |
| **Descripción** | Actividad para practicar cómo calcular el límite de funciones usando las propiedades de límite del cociente |

[SECCIÓN 2] **2.4. Composición de límites**

La propiedad de límite de la composición de funciones establece que

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Propiedades del límite de una composición de funciones** |
| **Contenido** | Si y entonces |

Estas propiedades también se tienen para **límites laterales** y **limites en el infinito.**

Antes de ver algunos ejemplos, es necesario aclarar que se debe observar si el límite *L* es alcanzando por un solo lado o por ambos es decir:

Si entonces, el límite en *g* se calcula únicamente por derecha, es decir .

Si entonces, el límite en *g* se calcula únicamente por izquierda, es decir .

**Ejemplo 1.** Sean y calcular:

Como

se calcula el límite de la función *g* en 2 por derecha, por lo tanto por la propiedad de composición de límites, se tiene que

**Ejemplo 2.** Calcular

Al considerar las funciones

y

tenemos que

Además, como

Por lo tanto se calcula el límite de la función *g* cuando *x* tiende a 0+, así

Entonces, por la propiedad del límite de composición de funciones, se tiene que

Ejemplo 3. Sean las funciones

y

calcular

así

como

entonces, se calcula el límite de la función *g* en ∞, es decir que

Por lo tanto, por la propiedad de composición de funciones se tiene que

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC120 |
| **Título** | Propiedades del límite de la composición |
| **Descripción** | Actividad para practicar cómo calcular el límite de funciones usando las propiedades de límite de la composición |

[SECCIÓN 2] **2.5 Regla de sustitución**

Las propiedades del límite de una función permiten reconocer las funciones en las cuales la imagen por la función en un punto es igual al límite de la función en el mismo punto de esta manera

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Regla de sustitución por evaluación del límite en un punto** |
| **Contenido** | Dada una función *f* definida a través de una expresión algebraica en todo número real del intervalo *(a – h, a + h)*, tal que a y h son números reales con h > 0, además esta función no está definida a trozos. Entonces  Si la función *f* está definida en el intervalo *[a, a+ h)*, entonces  Asimismo, si la función *f* está definida en el intervalo *(a – h, a]*, entonces: |

En otras palabras para usar la regla de la sustitución por evaluación debemos verificar que los valores alrededor del punto tengan imagen por la función y además que la función no esté definida a trozos, si la función cumple estas condiciones, entonces, para calcular el límite de una función en un punto, es suficiente con determinar la imagen de la función en dicho punto.

**Ejemplo 1.** Calcular

Como la función no está definida a trozos y 2 es un número real del dominio de la función, entonces para determinar este límite se calcula la imagen de la función cuando *x = 2.*

=

**Ejemplo 2.** Calcular

Esta función tiene por dominio (-∞, -1) ∪ (1, ∞), por lo tanto los valores cercados de 2 tiene imagen, además la función no está definida a trozos.

**Ejemplo 4.** Las funciones polinómicas no están definidas a trozos y tienen por domino todos los reales, luego

**Ejemplo 5.** Las funciones racionales no están definidas a trozos y tienen por dominio los reales, con el denominador diferente de 0, luego:

siempre y cuando

.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC130 |
| **Título** | Regla de sustitución por evaluación |
| **Descripción** | Actividad para calcular algunos límites de funciones a través de la regla de sustitución e identificar las condiciones necesarias que permiten aplicar esta regla |

[SECCIÓN 2] **2.6. Consolidación.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC140 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Cálculo de límites por propiedades |
| **Descripción** | Actividad para calcular el límite de funciones, usando las diferentes propiedades de límites y la regla de evaluación |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC150 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Límites en el infinito de funciones algebraicas |
| **Descripción** | Interactivo para estudiar cómo calcular el límite en el infinito de funciones algebraicas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC160 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Asíntotas horizontales de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se identifican las asíntotas horizontales de una función a través de los límites al infinito |

[SECCIÓN 1] **3. Límites Indeterminados**

Existen algunos límites que se denominan como **límites indeterminados**, se llaman así porque no se sabe con certeza si el límite existe o no y en caso de que se exista no se conoce claramente cuál es su valor, esto depende de cada caso particular.

[SECCIÓN 2] **3.1. Indeterminación de la suma de límites**

Con la suma se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminación de la suma de límites** |
| **Contenido** | * Si y entonces   es un límite indeterminado |

Asimismo sucede con sucede con los límites laterales y al infinito.

**Ejemplo 1.** Sean los límites

y

Luego, la suma es indeterminada, pero en este caso tenemos que

**Ejemplo 2.** Sean los límites

y

Por lo tanto, la suma es indeterminada, y se tiene que

[SECCIÓN 2] **3.2. Indeterminación de producto de límites**

Con el producto se tiene que

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminaciones en el producto de limites** |
| **Contenido** | Si y entonces  es indeterminado |

**Ejemplo 1.** Dados los límites

y

De esta forma, el producto se indeterminada, en este caso tenemos que

**Ejemplo 2.** Sean

y

Por lo tanto, por la propiedad del producto el límite es indeterminado, sin embargo se tiene que

[SECCIÓN 2] **3.3. Indeterminación del cociente de límites**

Con el cociente se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminaciones en el cociente de limites** |
| **Contenido** | * Si y entonces   es indeterminado   * Si y entonces   se considera indeterminado. |

Por lo general, en las indeterminaciones de suma y producto se suelen realizar procesos algebraicos para ser expresados como cocientes, (como es el caso del ejemplo 2 de suma y el ejemplo 2 de producto).

**Ejemplo 1.** Se tienen los límites

y

Por la propiedad del cociente, el límite es indeterminado, sin embargo

**Ejemplo 2.** Sean los límites

y ,

en este caso se tiene que

**Ejemplo 3.** Sean

y

por lo tanto

Sin embargo, este último límite no existe.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Para determinar el límite de una función, los pasos a seguir son los siguientes.   1. Se sustituye el límite de la función por evaluación.   En el caso de presentarse alguna indeterminación, se desarrollan alguno de los siguientes procesos algebraicos para evitar la indeterminación:   * Factorización. * Racionalización del denominador o del numerador. * Multiplicación por una función cuyo límite en el punto sea 1. |

**Ejemplo 4.** Determinar el límite

Al sustituir e obtiene una indeterminación de la forma

,

se puede resolver multiplicando por 1, expresado mediante una fracción racional de la siguiente manera

De esta forma,

A partir de la propiedad del producto se obtiene que

*= 0*

De esta forma

[SECCIÓN 2] **3.4 Consolidación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC170 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Limites indeterminados de funciones algebraicas |
| **Descripción** | Interactivo para estudiar cómo calcular algunos limites algebraicos indeterminados |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC180 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Algunos límites trigonométricos indeterminados |
| **Descripción** | Interactivo para estudiar cómo calcular algunos límites trigonométricos indeterminados |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC190 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Calculando límites de indeterminaciones |
| **Descripción** | Actividad para practicar las estrategias aprendidas para el cálculo de límites indeterminados 0/0 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC190 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Asíntotas verticales de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica identificar las asíntotas verticales de una función a través de sus límites |

[SECCIÓN 1]**4 Ejercitación y competencias**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC200 |
| **Título** | Competencias: Concepto y cálculo de límites |
| **Descripción** | Actividad en la que se refuerza lo aprendido sobre el cálculo de límites con algunas aplicaciones |

[SECCIÓN 1]**Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_G11\_01\_CO\_REC210 |
| **Título** | Evalúa tus conocimientos sobre límites de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se evalúa los conceptos que hemos trabajado en este tema |